

# STUDI ELEMEN *DISCRETE-KIRCHHOFF MINDLIN QUADRILATERAL* (DKMQ) UNTUK ANALISIS STATIK PELAT LENTUR DAN PENGEMBANGAN UNTUK ANALISIS TEKUK PELAT

Erwin<sup>1</sup>, Alexander Richard<sup>2</sup> dan Wong Foek Tjong<sup>3</sup>

**ABSTRAK :** Analisis pelat lentur yang menggunakan metode elemen hingga telah mengalami banyak perkembangan. Salah satunya adalah elemen yang dikembangkan oleh Katili pada tahun 1993, yaitu *Discrete-Kirchhoff Mindlin Quadrilateral* (DKMQ). Elemen ini diklaim telah memenuhi berbagai kriteria, seperti lolos *patch test*, tidak terjadi *shear locking*, tidak ada tambahan *zero-energy modes*, tidak sensitif terhadap distorsi bentuk, dan konvergensi elemen yang baik. Untuk membuktikan hal-hal tersebut, pada penelitian ini elemen DKMQ akan digunakan sebagai elemen uji coba, dengan batasan berupa analisis linear dan material isotropik. Selain itu, akan dilakukan pengembangan pada elemen DKMQ untuk analisis tekuk pelat. Dengan berbagai percobaan dan pengujian dalam perhitungan statik, hasil dari elemen ini sesuai dengan apa yang telah diklaim sebelumnya. Hanya saja, pada pengujian *patch test* terhadap *constant shear* elemen ini mempunyai hasil yang kurang tepat terhadap hasil eksaknya. Sedangkan untuk analisis tekuk, elemen DKMQ menunjukkan konvergensi yang cukup baik, namun gaya kritis yang dihasilkan mengarah pada nilai yang sedikit di bawah hasil referensi.

**KATA KUNCI:** metode elemen hingga, analisis statik, analisis tekuk, teori pelat Reissner-Mindlin, elemen segi empat, DKMQ

## 1. PENDAHULUAN

Perhitungan untuk pelat dapat dilakukan dengan cara eksak maupun numerik. Cara eksak mempunyai perumusan yang cukup rumit sehingga hanya dapat digunakan untuk bentuk – bentuk pelat tertentu. Sedangkan dengan cara numeric, salah satunya adalah dengan metode elemen hingga (MEH), perhitungan pelat akan menjadi lebih mudah dan dapat digunakan juga untuk bentuk – bentuk pelat yang rumit. Elemen pelat yang digunakan juga banyak mengalami perkembangan dengan tujuan untuk membentuk elemen yang bebas dari permasalahan-permasalahan yang sering muncul, seperti *shear locking*. Berawal dari *Discrete Kirchhoff Triangular* (DKT) dan *Discrete Kirchhoff Quadrilateral* (DKQ) yang dirumuskan berdasarkan teori pelat Kirchhoff, kemudian dikembangkan oleh Batoz dan Lardeur (1989) menjadi *Discrete Shear Quadrilateral–Batoz and Lardeur* (DSQ-BL) dengan menggunakan batasan diskrit Kirchhoff dan persamaan kesetimbangan (Katili, 1993). Namun elemen tersebut masih memiliki kekurangan pada rotasi dalam bidang normal akibat dari gaya geser. Selain itu juga elemen ini baru dapat beroperasi dengan baik pada pelat tipis saja. Pada pelat tebal, masih terdapat beberapa kesalahan kecil yaitu dalam  $M_x$ ,  $M_y$ , dan  $M_{xy}$  (Katili, 1993). Karena berbagai alasan diatas, dilakukan perbaikan elemen lebih lanjut sehingga munculah *Discrete-Kirchhoff Mindlin Quadrilateral* (DKMQ) yang dalam perumusannya diklaim telah memenuhi berbagai kriteria, seperti bebas *shear locking*, dapat konvergen dengan baik, perumusan *shape function* yang simetris pada tiap sisinya, dan terutama lolos dari *patch test* (Katili, 1993). Karena klaim dari elemen ini cukup baik, evaluasi perlu dilakukan untuk memastikan apakah elemen ini benar – benar dapat digunakan. Selain itu juga akan

---

<sup>1</sup> Mahasiswa Program Studi Teknik Sipil Universitas Kristen Petra Surabaya, [erwinutomo12@gmail.com](mailto:erwinutomo12@gmail.com)

<sup>2</sup> Mahasiswa Program Studi Teknik Sipil Universitas Kristen Petra Surabaya, [alexander.richard.lie@gmail.com](mailto:alexander.richard.lie@gmail.com)

<sup>3</sup> Dosen Program Studi Teknik Sipil Universitas Kristen Petra Surabaya, [wftjong@petra.ac.id](mailto:wftjong@petra.ac.id)

dilakukan pengembangan elemen DKMQ untuk perhitungan tekuk yang sejauh pengetahuan penulis masih belum ada. Diharapkan pengembangan untuk analisis tekuk ini dapat memenuhi kriteria yang ada dan dapat digunakan untuk pekerjaan di lapangan dalam berbagai macam kasus.

## 2. PERUMUSAN DASAR

Asumsi dasar dari teori pelat Reissner-Mindlin (Wong, 2009) yaitu setelah terjadi deformasi pada pelat maka garis normal akan tetap tegak (tidak bengkok), namun belum tentu tegak lurus terhadap bidang netral pada pelat tersebut, artinya dapat terjadi rotasi. Selain itu tegangan normal pada bagian tengah pelat dapat diabaikan atau  $\sigma_z = 0$ . Asumsi-asumsi tersebut menjadi dasar untuk semua perumusan, dan untuk perpindahan dapat dirumuskan sebagai:

$$u = z\beta_x(x, y), \quad v = z\beta_y(x, y), \quad w = w(x, y) \quad (1)$$

dimana  $u$  adalah perpindahan pelat arah  $x$ ,  $v$  pada arah  $y$ ,  $w$  pada arah  $z$ , dan untuk  $\beta_x$  dan  $\beta_y$  adalah rotasi pada arah  $x$  dan arah  $y$ . Untuk menghubungkan antara perpindahan dengan regangan akan menggunakan matriks kurvatur ( $\chi$ ) dan matriks regangan geser ( $\gamma$ ), dengan perumusan:

$$\langle \chi \rangle = \left\langle \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \quad \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \quad \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \right\rangle \quad (2)$$

$$\langle \gamma \rangle = \langle \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz} \rangle = \left\langle \frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \quad \frac{\partial w}{\partial y} + \beta_y \right\rangle \quad (3)$$

Hubungan matriks diatas dengan momen dan gaya geser didapat dengan rumus:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [H_b] \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix}, \quad [H_b] = D_b \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad D_b = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (4)$$

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = [H_s] \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}, \quad [H_s] = D_s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_s = kGh, \quad k = \frac{5}{6}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5)$$

Persamaan fungsional yang akan digunakan adalah persamaan modifikasi dari Hu-Washizu, dengan rumus:

$$\Pi = \Pi_b(\beta_x, \beta_y) + \Pi_s(w, \beta_x, \beta_y, \{\gamma\}, \{T\}) - \int_A w f_z dA + \Pi_{ext} \quad (6)$$

dengan  $\Pi_b$  adalah energi dari regangan lentur,  $\Pi_s$  adalah energi dari regangan geser,  $\Pi_{ext}$  menunjukkan efek dari batas-batas dan beban lain, dan  $f_z$  adalah beban merata pada arah  $z$ .

## 3. MODIFIKASI PERUMUSAN UNTUK ELEMEN DKMQ

*Shape function* untuk elemen DKMQ dirumuskan sebagai berikut:

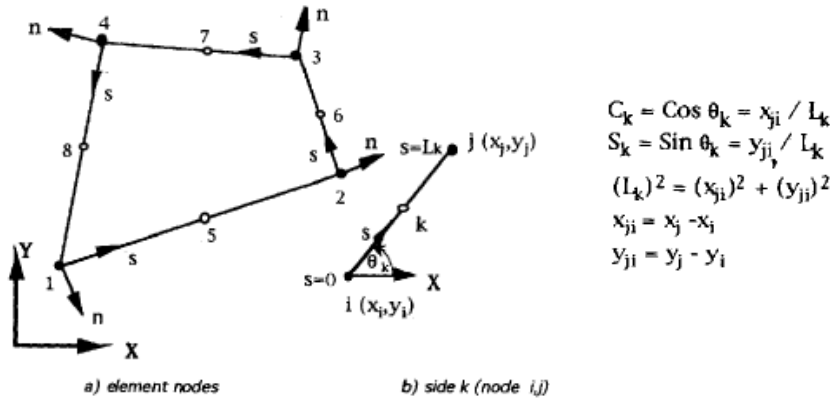
$$\beta_x = \sum_{i=1}^4 N_i \beta_{xi} + \sum_{k=5}^8 P_k C_k \Delta \beta_{sk} \quad (7)$$

$$\beta_y = \sum_{i=1}^4 N_i \beta_{yi} + \sum_{k=5}^8 P_k S_k \Delta \beta_{sk} \quad (8)$$

$N_i$  merupakan *shape function* untuk transformasi  $\beta_x$  dan  $\beta_y$ , sedangkan  $P_k$  adalah fungsi dari *higher modes*. Nilai dari  $N_i$  dan  $P_k$  dapat dilihat pada **Tabel 1**.  $\beta_{xi}$  dan  $\beta_{yi}$  menunjukkan rotasi pada titik 1, 2, 3, 4, dan  $\Delta \beta_{sk}$  menunjukkan rotasi pada titik 5, 6, 7, 8 seperti pada **Gambar 1**.  $C_k$  dan  $S_k$  adalah arah sudut dari sisi  $k$ .

**Tabel 1. Shape Function untuk Rotasi**

$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$	$P_5 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta)$
$N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$	$P_6 = \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2)$
$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)$	$P_7 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta)$
$N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$	$P_8 = \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2)$



**Gambar 1. Geometri dan Sistem Koordinat Lokal Tangensial – Normal pada Elemen Segi Empat**  
Sumber: Katili (1993, p. 5)

Selain dari *shape function* yang menggunakan *higher modes*, beberapa modifikasi dilakukan dan akhirnya didapatkan matriks yang menghubungkan antara kurvatur dengan perpindahan, yaitu:

$$\{\chi\} = [B_b]\{U_n\} \quad (9)$$

Sedangkan hubungan antara regangan geser dengan perpindahan didapatkan dengan rumus:

$$\{\bar{\gamma}\} = [B_s]\{U_n\} \quad (10)$$

Dimana  $B_b$  dan  $B_s$  adalah matriks penghubungnya, dan  $U_n$  sebagai matriks *nodal displacement* dengan rumus:

$$U_n = \langle w_1 \quad \beta_{x1} \quad \beta_{y1} \quad w_2 \quad \beta_{x2} \quad \beta_{y2} \quad w_3 \quad \beta_{x3} \quad \beta_{y3} \quad w_4 \quad \beta_{x4} \quad \beta_{y4} \rangle \quad (11)$$

Sehingga energi dari regangan geser dan regangan lentur menjadi:

$$\Pi_b^e = \frac{1}{2} \langle U_n \rangle [K_b] \{U_n\} \quad (12)$$

$$\Pi_s^e = \frac{1}{2} \langle U_n \rangle [K_s] \{U_n\} \quad (13)$$

Dimana matriks kekakuan diatas dirumuskan sebagai:

$$K_b = \int_{A^e} [B_b]^T [H_b] [B_b] dA \quad (14)$$

$$K_s = \int_{A^e} [B_s]^T [H_s] [B_s] dA \quad (15)$$

Dan matriks kekakuan,  $K$ , didapat dengan menjumlahkan kedua matriks diatas, yaitu:

$$[K] = [K_b] + [K_s] \quad (16)$$

#### 4. GAYA LUAR DAN GAYA DALAM

Setelah variable nodal  $\{U_n\}$  didapatkan, maka momen lentur  $\{M\}$  dapat dicari pada berbagai titik dengan persamaan:

$$\{M\} = [H_b][B_b(\xi, \eta)]\{U_n\} \quad (17)$$

Dan gaya geser  $[T_x]$  dan  $[T_y]$  juga dapat dicari pada berbagai titik dengan persamaan

$$\{T\} = [H_s][B_s(\xi, \eta)]\{U_n\} \quad (18)$$

#### 5. PERUMUSAN ELEMEN DKMQ UNTUK PERHITUNGAN TEKUK

Perumusan tekuk pelat diambil dari Liu (2003). Untuk analisis tekuk pelat, total potensial energi dari pelat hampir sama dengan persamaan (6), namun dengan  $\Pi_N$  sebagai energy akibat gaya tekuk dengan perumusan:

$$\Pi_N = \int_{A^e} w^T \sigma_0 w dA + \int_{A^e} \beta_x^T \sigma_0 \beta_x \frac{h^3}{12} dA + \int_{A^e} \beta_y^T \sigma_0 \beta_y \frac{h^3}{12} dA \quad (19)$$

dimana  $w$ ,  $\beta_x$ ,  $\beta_y$  adalah *nodal displacement* yang diambil dari matriks  $U_n$ , dan  $\sigma_0$  adalah *pre-buckling stresses* atau gaya tekuk mula-mula. Setelah itu, dicari gaya tekan kritisnya dengan persamaan eigen:

$$(K - \lambda K_G)d = 0 \quad (20)$$

Dimana  $K$  adalah matriks kekakuan yang sama dengan persamaan (16),  $\lambda$  adalah nilai dari  $\sigma_0$  yang dicari dan  $d$  adalah bentuk dari *buckling mode*, sedangkan  $K_G$  didapatkan dengan rumus:

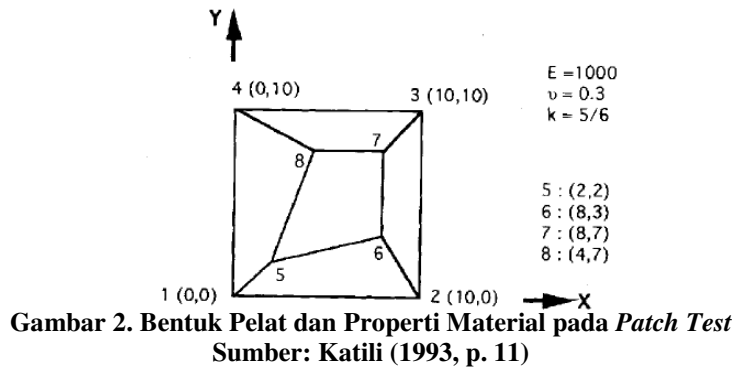
$$K_G = h \int_{A^e} G_b^T \sigma_0 G_b dA + \frac{h^3}{12} \int_{A^e} G_{s1}^T \sigma_0 G_{s1} dA + \frac{h^3}{12} \int_{A^e} G_{s2}^T \sigma_0 G_{s2} dA \quad (21)$$

## 6. HASIL PERHITUNGAN NUMERIK

Dalam penelitian ini, dilakukan perhitungan numerik untuk analisis statik dan analisis tekuk pelat. Untuk analisis statik terdiri dari pengujian *patch test*, pelat berbentuk lingkaran dan persegi, *rhombic plate*, dan distorsi geometri. Sedangkan untuk analisis tekuk pelat terdiri dari pengujian terhadap konvergensi elemen, perubahan perbandingan panjang sisi pelat, gaya geser kritis, pelat berlubang lingkaran, dan pelat dengan lubang kompleks (bunga). Pada bagian ini, hasil analisis yang ditampilkan hanya pada pengujian *patch test* dan distorsi geometri untuk analisis statik, serta pengujian terhadap konvergensi elemen, dan gaya geser kritis untuk analisis tekuk pelat.

### 1. Patch Test

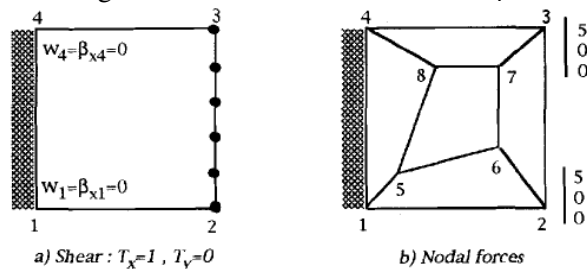
Pengujian *Patch test* yang ditampilkan hanya terhadap *constant shear deformation*, karena hasilnya baru mendekati eksak ketika pelat relatif tebal. Bentuk pelat dan properti material yang digunakan dapat dilihat pada **Gambar 2**.



Adapun beban yang digunakan pada pengujian ini berupa *prescribed displacement* pada persamaan (22) dan *prescribed forces* pada **Gambar 3** di keempat titik nodal pojok.

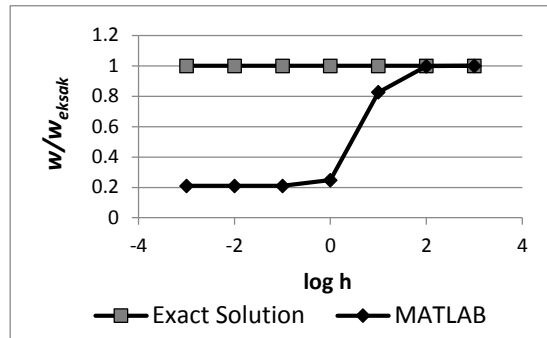
$$w = \frac{1}{2}(x + y), \quad \beta_x = \beta_y = \frac{1}{2} \quad (22)$$

Pengujian dilakukan dengan berbagai macam ketebalan mulai dari  $h/L = 10^{-3}$  hingga  $h/L = 10^3$ .



Hasil pengujian dengan *prescribed displacement* menunjukkan bahwa terdapat error pada nilai *displacement* ( $w, \beta_x, \beta_y$ ) di titik 5, 6, 7, dan 8. Pada ketebalan pelat yang tipis ( $h < 10$ ), error pada nilai *displacement* cukup besar. Nilai *displacement* barulah mendekati hasil eksak setelah ketebalan pelat

diperbesar ( $h > 100$ ). Error dari nilai *displacement* dengan ketebalan  $h = 0.001$  sampai  $h = 1000$  hanya pada titik 5 dapat dilihat pada **Gambar 4**.



**Gambar 4.** Perbandingan Nilai *Displacement* antara Matlab dengan Hasil Eksak pada Titik 5

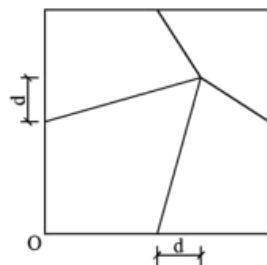
Hal yang sama juga terjadi pada pengujian dengan *prescribed forced*. Untuk pelat dengan ketebalan  $h = 1000$ , gaya geser yang dihasilkan telah sesuai dengan yang diharapkan, yaitu  $T_x = 1$  dan  $T_y \approx 0$ . Namun untuk gaya momen yang dihasilkan tidak mendekati nol ( $M_x = M_y = M_{xy} = 0$ ). Hasil gaya momen dan gaya geser dari *prescribed forced* untuk  $h = 1000$  dapat dilihat pada **Tabel 2**.

**Tabel 2.** Nilai Gaya Momen dan Gaya Geser dari *Prescribed Forced* pada Titik 5, 6, 7, 8 untuk  $h = 1000$

Titik	$M_x$	$M_y$	$M_{xy}$	$T_x$	$T_y$
5	-7.8122	0.6902	0.8634	1.0000	-1.93E-05
6	-2.0231	-2.6049	1.1217	1.0000	4.01E-06
7	-2.1484	-2.3113	-0.8081	1.0000	4.08E-06
8	-5.3829	3.8426	-0.7710	1.0000	-9.56E-06

## 2. Distorsi Geometri

Pengujian ini dilakukan pada seperempat bagian pelat saja. Pengujian dilakukan dengan perletakan sendi (*simply supported*). Kemudian seperempat bagian pelat tersebut dibagi lagi menjadi 4 bagian *mesh*. Untuk melakukan pengujian ini, titik bagian tengah dari pelat akan digeser sejauh  $d$  dimana  $d = 0, 0.5, 1$ , dan  $1.2$ . Adapun dimensi, properti material, dan bentuk *meshing* pada pengujian ini dapat dilihat pada **Gambar 5**. Pada pengujian ini akan diamati nilai *displacement* pada bagian tengah pelat. Hasil dari pengujian ini menunjukkan bahwa error dari nilai *displacement* yang dihasilkan relatif kecil baik untuk  $h/L = 0.2$  maupun  $h/L = 0.01$ . hasil tersebut dapat dilihat pada **Tabel 3**.



$E = 10.92$  ;  $\nu = 0.3$   
 $h = 2$  dan  $0.1$   
 $L = 10$   
 $h/L = 0.2, 0.01$   
 Uniform loading :  $f_z = 1$   
 Boundary condition:  
 (SS1:  $w = 0$  ; SS2 :  $w = 0, \beta_x = 0$ )

**Gambar 5.** Pelat Distorsi Geometri dengan Mesh 2 x 2  
 Sumber: Chang (2012, p. 224)

**Tabel 3. Nilai Error dari Hasil *Displacement* untuk SS1 dan SS2 pada Bagian Tengah Pelat dengan  $h/L = 0.2$  dan  $h/L = 0.01$**

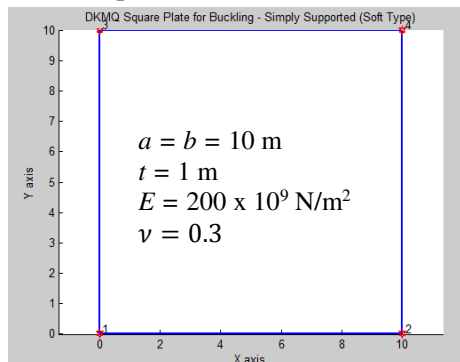
$h/L$	$d$	<i>Displacement (w)</i>			
		SS1	Error (%)	SS2	Error (%)
0.2	0	-6.458947	0	-5.9447	0
	0.5	-6.515278	0.87214	-5.9605	0.265783
	1	-6.550146	1.411982	-5.91	-0.58371
	1.2	-6.543295	1.305907	-5.8523	-1.55433
	1.3	-6.531781	1.127648	-5.8108	-2.25243
0.01	0	-4.05E+04	0	-4.05E+04	0
	0.5	-4.10E+04	1.186595	-4.08E+04	0.803044
	1	-4.16E+04	2.671909	-4.10E+04	1.267574
	1.2	-4.18E+04	3.353998	-4.10E+04	1.354056
	1.3	-4.20E+04	3.711463	-4.10E+04	1.373823

### 3. Konvergensi Elemen

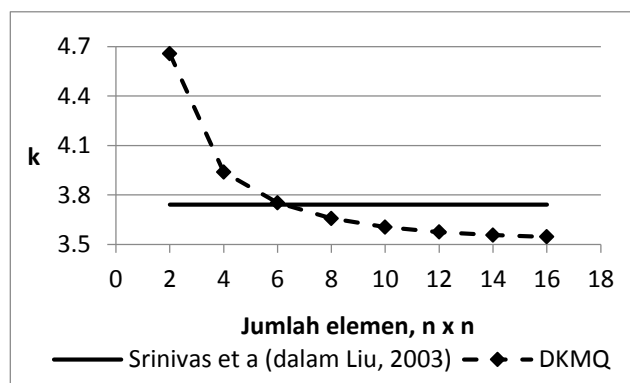
Pengujian ini dilakukan pada satu pelat berbentuk persegi sederhana dan diuji dengan jumlah elemen yang semakin halus. Jumlah elemen yang akan digunakan dimulai dari 2x2, 4x4, dan seterusnya sampai pada 16x16. Bentuk pelat yang akan diuji beserta dengan parameternya dapat dilihat pada **Gambar 6**. Untuk pengujian ini dicari gaya tekan kritis arah  $x$ , yaitu  $k$  pada perumusan:

$$k = \frac{b^2 N_0}{\pi^2 D} \quad (23)$$

dimana  $b$  adalah lebar pelat,  $N_0$  adalah gaya kritis yang dicari, dan  $D$  sama dengan  $D_b$  pada persamaan (4). Hasil dari pengujian ini dapat dilihat pada **Gambar 7**.



**Gambar 6. Bentuk Pelat dan Parameternya untuk Pengujian Tekuk terhadap Konvergensi Elemen**

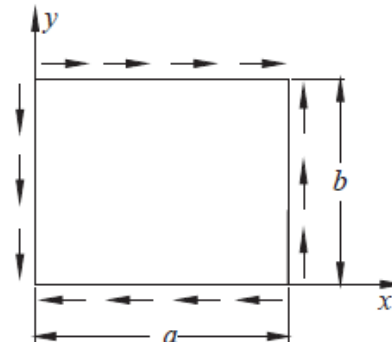


**Gambar 7. Grafik Perbandingan antara Nilai  $k$  dari Hasil Elemen DKMQ dibandingkan dengan Hasil Referensi**

Pada **Gambar 7** menunjukkan hasil dari elemen DKMQ yang menuju pada nilai  $k = 3.5$ , sedangkan  $k_{ref} = 3.741$ . Atas hal tersebut, dapat disimpulkan bahwa elemen DKMQ lebih fleksibel dibandingkan dengan hasil dari Srinivas et al (dalam Liu, 2003).

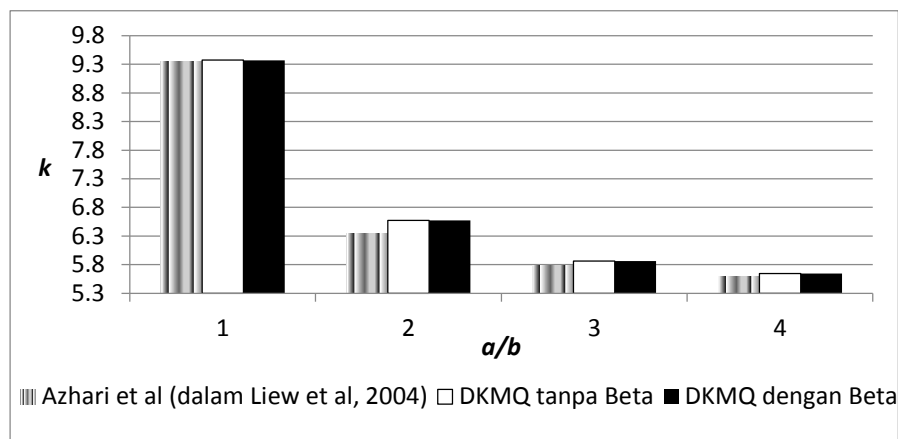
#### 4. Gaya Geser Kritis

Pengujian ini dilakukan dengan mengubah perbandingan sisi panjang,  $a$  dan lebarnya,  $b$  mulai dari  $a/b=1$ ;  $a/b=2$ ;  $a/b=3$ ; dan  $a/b=4$ . Parameter dari bahan yang akan digunakan sama dengan yang ada pada **Gambar 6**. Pada pengujian ini menggunakan gaya geser, dan konfigurasi pembebanan serta ukuran pelat dapat dilihat pada **Gambar 8**.



**Gambar 8. Konfigurasi Pelat dan Arah Pembebanan untuk Pengujian Tekuk terhadap Gaya Geser Kritis**  
Sumber: Liew et al (2004, p. 19)

*Mesh* pada sisi  $b$  selalu sama, dengan  $n=30$ , dimana pada sisi  $a$  jumlah *mesh* akan mengikuti perbandingan  $a/b$ . Untuk membuktikan adanya pengaruh  $\beta$  dalam matriks kekakuan  $K_G$ , hasil perhitungan akan dijalankan dua kali, satu dengan perumusan  $K_G$  yang menggunakan  $\beta$ , dan satu lagi tanpa menggunakan  $\beta$ . Hasil dari pengujian ini dapat dilihat pada **Gambar 9**. Dari hasil tersebut dapat dilihat bahwa tidak ada perbedaan nilai  $k$  untuk elemen DKMQ yang menggunakan  $\beta$  dan yang tidak menggunakan  $\beta$ . Dengan hasil dari Azhari et al ( dalam Liew et al, 2004) tidak ada perbedaan yang signifikan.



**Gambar 9. Grafik Nilai  $k$  untuk Elemen DKMQ dan Referensi pada Berbagai Nilai  $a/b$**

## 7. KESIMPULAN

Untuk analisis statik, elemen DKMQ secara umum mempunyai hasil-hasil yang memuaskan. Elemen DKMQ mempunyai karakteristik konvergensi yang baik, tidak terjadi *shear locking*, tidak adanya tambahan *zero-energy modes*, tidak sensitif terhadap distorsi bentuk, invarian secara geometri, dan juga efisien dalam komputasi. Untuk *patch test*, elemen DKMQ lolos *constant curvature test*. Sedangkan untuk *constant shear*, hasil dari elemen DKMQ kurang tepat terhadap hasil eksaknya. Untuk

perhitungan tekuk pelat, elemen DKMQ juga secara umum memberikan hasil yang baik. Selain dalam analisis statik, karakteristik konvergensi yang baik juga dapat ditemui untuk perhitungan tekuk pelat. Namun hasil tersebut ternyata konvergen pada nilai yang berada di bawah dari hasil referensi untuk gaya kritis pada arah  $x$ . Untuk gaya geser kritis juga mendekati hasil dari referensi, dengan selisih yang kecil. Hanya saja, untuk mempunyai hasil yang mendekati referensi tersebut jumlah elemen yang digunakan harus lebih banyak atau lebih halus dari pengujian gaya kritis arah  $x$ .

## 8. DAFTAR REFERENSI

- Katili, I. (1993). 'A New Discrete Kirchhoff-Mindlin Element Based on Mindlin-Reissner Plate Theory and Assumed Shear Strain Fields-Part II: An Extended DKQ Element for Thick-Plate Bending Analysis'. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36, 1885-1908.
- Batoz, J.L. and Lardeur, P. (1989). A Discrete Shear Triangular Nine d.o.f Element for The Analysis of Thick to Very Thin Plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 15, 1771-1812.
- Wong, F.T. (2009, May). *Kriging-Based Finite Element Method for Analyses of Plate and Shells*. Unpublished doctoral dissertation. Asian Institute of Technology. Bangkok.
- Liu, G.R. (2003). *Mesh Free Methods*. Boca Raton, CRC Press.
- Chang, S., Al-Bahar, S.K., Zhao, J. (Eds.). (2012). *Advances in Civil Engineering and Building Materials Book*. Boca Raton, CRC Press.
- Liew, K.M., Wang, T., Ng, T.Y., Tan, M.J. (2004). Free Vibration and Buckling Analyses of Shear-Deformable Plates Based on FSDT Meshfree Method. *Journal of Sound and Vibration*, 276, 997-1017.